# Formelsammlung (Algebra)

## 1. Grundrechenarten

| | |
|---|---|
| **Addition**<br>$$a + b = c$$<br>Summand + Summand = Summe | **Subtraktion**<br>$$a - b = c$$<br>Minuend - Subtrahend = Differenz |
| **Multiplikation**<br>$$a \cdot b = c$$<br>Faktor · Faktor = Produkt<br>*Die Multiplikation kann als Kurzschreibweise der Addition angesehen werden:*<br>$$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ Summanden}} = b \cdot a$$ | **Division**<br>$$a \div b = c$$<br>Dividend ÷ Divisor = Quotient |

*Hinweis: Stehen zwei Buchstaben direkt hintereinander oder ein Buchstabe vor/hinter einer Klammer, so ist eine Multiplikation gemeint:*

$$ab = a \cdot b \qquad , \qquad a(b + c) = a \cdot (b + c)$$

## 2. Rechengesetze

| | | |
|---|---|---|
| **Kommutativgesetz**<br>(Vertauschungsgesetz)<br>$$a + b = b + a$$<br>$$a \cdot b = b \cdot a$$<br>*gilt für eine Summe und ein Produkt!* | **Assoziativgesetz**<br>(Verbindungsgesetz)<br>$$a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c)$$<br>$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$<br>*gilt nur bei Summen und Produkten!* | **Distributivgesetz**<br>(Verteilungsgesetz)<br>$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$<br>$$(b \pm c) \div a = \frac{b \pm c}{a} = \frac{b}{a} \pm \frac{c}{a}$$<br>*gilt, wenn außerhalb der Klammer eine Punktrechnung, innerhalb der Klammer eine Strichrechnung steht!* |

## 3. Bruchrechnen

| Erweitern | Kürzen | Addition/Subtraktion | Multiplikation | Division |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ | $\frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}$ | $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$ | $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$ | $\frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$ |

*Der Wert über den Bruchstrich heißt **Zähler**, der Wert unter dem Bruchstrich **Nenner**. Bei einem Bruch darf der Nenner nicht Null sein!*

## 4. Rechnen mit Klammern

| | |
|---|---|
| **Auflösen von Plusklammern**<br>$+(-a+b-c) = -a+b-c$<br>*Die Vorzeichen bleiben erhalten!* | **Auflösen von Minusklammern**<br>$-(-a+b-c) = +a-b+c$<br>*Die Vorzeichen ändern sich!* |
| **Ausklammern**<br>$ab+ac-ad = a(b+c-d)$<br>$abx+ac-ady = a(bx+c-dy)$<br>*Steht bei einer Summe/Differenz in jedem Summand/Subtrahend der selbe Faktor (hier: a), so kann dieser ausgeklammert werden.* | **Ausmultiplizieren**<br>$a(-b+c-d) = -ab+ac-ad$<br>$ax(by-cz+d) = axby-axcz+axd$<br>*Der Faktor vor der Klammer gilt für jeden Summand/Subtrahend in der Klammer.* |
| **Multiplizieren von Summen und Differenzen**<br>$(a+b)\cdot(c-d) = ac-ad+bc-bd$ | |

## 5. Binomische Formeln

| **1. binomische Formel** | **2. binomische Formel** | **3. binomische Formel** |
|---|---|---|
| $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ | $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ | $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$ |

## 6. Potenzen und Wurzeln

| | |
|---|---|
| *Eine Potenz kann als Kurzschreibweise der Multiplikation angesehen werden:*<br>$\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{b \text{ Faktoren}} = a^n$ | $a^n = c$<br>Man nennt:<br>$a$ : Basis (Grundwert)<br>$n$ : Exponent (Hochzahl)<br>$a^n$ : Potenz<br>$c$ : Potenzwert (Ergebnis der Potenz) |
| Potenzieren und Wurzelziehen (*Radizieren*) sind entgegengesetzte Rechenarten. | $a^n = c \quad \mid \quad ()^{\frac{1}{n}}$<br>$a = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$ |

*Hinweis: steht bei einer Wurzel keine Hochzahl, so ist die Quadratwurzel gemeint:*

$$\sqrt{\square} = \sqrt[2]{\square}$$

## 7. Potenzgesetze

| | |
|---|---|
| **Allgemein**<br>$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ Faktoren}} = a^n$<br>$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$<br>$a^0 = 1$<br>$a^1 = a$<br>$a^{-1} = \frac{1}{a}$ | **Potenzen mit rationalem Exponent**<br>$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$<br>**Potenzen von Potenzen**<br>$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$ |
| **Potenzen mit gleicher Basis**<br>$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$<br>$a^p \div a^q = a^{p-q}$ | **Potenzen mit gleichem Exponent**<br>$a^p \cdot b^p = (ab)^p$<br>$a^p \div b^p = \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p = (a \div b)^p$<br>*Achtung:* $(ab)^p \neq ab^p$ |

## 8. Logarithmus und Logarithmengesetze

| | |
|---|---|
| $a^x = c \iff x = \log_a(c)$ | $\log_a(c) = \frac{\log(c)}{\log(a)}$<br>*Hinweis: steht beim Logarithmus keine Zahl mit dabei, meint man den 10er-Logarithmus:*<br>$\log(\square) = \log_{10}(\square)$<br>*Schreibt man stattdessen* ln*, so ist der natürliche Logarithmus zur Basis* e *gemeint:*<br>$\ln(\square) = \log_{\mathrm{e}}(\square)$ |
| $\log(a^p) = p \cdot \log(a)$ | |
| $\log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b)$ | |
| $\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$ | |
| $\log_a(a^2) = 2 \cdot \underbrace{\log_a(a)}_{=1} = 2 \cdot 1 = 2$ | $\log_a(1) = \log_a(a^0) = 0 \cdot \underbrace{\log_a(a)}_{=1} = 0 \cdot 1 = 0$ |

## 9. Rechnungen

| | |
|---|---|
| **Bei Rechnungen gilt immer:**<br>• Klammer<br>vor<br>• Potenz<br>vor<br>• Punkt<br>vor<br>• Strich<br>Wenn es dabei mehrere gleiche Rechenarten gibt, dann wird stets von links nach rechts gerechnet. | **Beispiel:**<br>$5+3\cdot(\underbrace{2\cdot 5}_{=10}-8)^2-23$<br>$5+3\cdot(\underbrace{10-8}_{=2})^2-23$<br>$5+3\cdot\underbrace{2^2}_{=4}-23$<br>$5+\underbrace{3\cdot 4}_{=12}-23$<br>$\underbrace{5+12}_{=17}-23$<br>$\underbrace{17-23}_{=-6}$<br>Zuerst die Klammer berechnen, innerhalb der Klammer gilt wieder die selbe Reihenfolge! |

## 10. Gleichungen auflösen

| | |
|---|---|
| Beim Auflösen muss man<br>1. Terme sortieren: alle Terme mit $x$ auf eine Seite, alle Terme ohne $x$ auf die andere Seite<br>2. Äquivalenzumformungen: Man führt auf beiden Seiten die selbe Operation aus<br>3. Tipp: man denkt sich immer um jede Seite eine Klammer!<br>4. Steht das $x$ in einer Klammer, so muss diese zuerst aufgelöst werden | $4x+3(x-4)^2-21=3x^2+5 \quad \lvert\text{Klammer}$<br>$4x+3x^2-24x\underbrace{+16-21}_{=-5}=3x^2+5 \quad \lvert -3x^2$<br>$4x+\cancel{3x^2}-24x-5-\cancel{3x^2}=5 \quad \lvert +5$<br>$-20x=10 \quad \lvert \div(-20)$<br>$x=-\frac{1}{2}$ |
| Bei den Äquivalenzumformungen macht man immer „das Gegenteil“.<br>Deshalb gilt auch bei der Operatorreihenfolge: Strich-Punkt-Potenz-Klammer | $x+5=7 \Longrightarrow -5$<br>$3x=18 \Longrightarrow \div 3$<br>$x^3=8 \Longrightarrow ()^{\frac{1}{3}}$<br>$2^x=16 \Longrightarrow \log_2()$ |
| $x$ und $x^2$ dürfen nicht zusammengerechnet werden! | **Mitternachtsformel/$p$-$q$-Formel**<br>$ax^2+bx+c=0 \iff x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$<br>$x^2+px+q=0 \iff x1{,}2=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ |